PROFUNDIZA EN PROBABILIDAD.

PROBABILIDADES, ESTIMACIONES, COMBINACIONES Y CONTRADICCIONES.

MATEMÁTICA… ¿ESTÁS AHÍ?
Por ADRIÁN PAENZA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Colección "Ciencia que ladra…"

ÍNDICE

LA PRUEBA QUE NO SE PUEDE TOMAR

Un profesor de secundaria anuncia a los estudiantes que pondrá una prueba “sorpresa” la semana siguiente. El profesor les dice que la prueba la pondrá cualquier día, exactamente a la una de la tarde. Eso sí: ellos se enterarán el mismo día de la prueba, a las ocho de la mañana, ni antes ni después. Y las reglas serán estrictas, en el sentido de que él garantizaba su cumplimiento.

SOLUCIÓN:
Veamos ahora el siguiente razonamiento que hicieron los alumnos.
Uno dijo:
–El viernes no la puede poner.
–¿Por qué? –preguntó otro.
–¡Fácil! –retomó el primero en hablar–. Si llegamos hasta el día jueves y no lo ha puesto, eso quiere decir que nosotros sabríamos el mismo jueves que la prueba será al día siguiente, ya que no le queda otra. Pero en ese caso, el profesor violaría su propia regla, ya que dijo que nos enteraríamos el mismo día de la prueba a las ocho de la mañana. Si no la puso hasta el jueves, ese día nosotros sabríamos que será el viernes. Y eso no puede pasar –terminó contundente.
–No, pero espera –saltó otro–. Entonces, el jueves tampoco lo puede poner –dijo entusiasmado y entusiasmando a los otros–.
Fíjense por qué: como nosotros ya sabríamos que el viernes no lo puede poner (si no lo puso el jueves), entonces, si no lo hizo el miércoles, sabríamos ese día (el miércoles) que el jueves tiene que poner la prueba. Pero eso volvería a violar sus propias reglas. Es decir, nosotros sabríamos el miércoles por la mañana, que si la prueba no la puso ese día, la tendría que poner el jueves porque el viernes no puede. Y es un lío para él, porque se dan cuenta que, así siguiendo, podemos demostrar ahora que el miércoles no la puede poner tampoco, ya que si el martes no la puso, como no puede hacernos rendir ni el jueves ni el viernes, tendría que ser el miércoles.
El proceso puede continuar hacia atrás, de manera tal de llegar a concluir que la prueba no puede ser puesta nunca. O mejor dicho, ¡no se puede tomar ningún día de esa semana! Al menos, no se puede poner en las condiciones que propuso el docente.
Ciertamente, los profesores ponen pruebas “sorpresa”, de manera que hay algo que no funciona. Esas reglas que puso el docente son incumplibles. O bien el profesor tiene que revisarlas y admitir que los alumnos puedan enterarse el día anterior que la prueba será puesta, o bien el carácter sorpresivo será un poco más discutible.

PROBABILIDAD DE GANAR EL CAMPEONATO MUNDIAL PARA UN EQUIPO CONSIDERADO FAVORITO

Supongamos que estamos en los octavos de final del torneo, es decir, quedan 16 equipos que juegan entre sí por el sistema de eliminación simple (o sea, el que pierde queda eliminado, y el ganador sigue en la competencia). Como se advierte, entonces, para que ese equipo salga campeón tiene que ganar cuatro partidos seguidos: octavos de final, cuartos de final, semifinal y la final.

Supongamos, por simplicidad, que este favorito tiene el 66,67 % de posibilidades de ganar partidos contra cualquier equipo que juegue, independientemente de otros factores, como la moral del grupo, los resultados anteriores en el campeonato, etcétera. Es decir, los expertos le adjudican una posibilidad de ganar dos de cada tres partidos que juegue contra cualquier otro equipo. Puesto en otros términos, es equivalente a decir que la probabilidad de que le gane a cualquier equipo es de 2/3. ¿Cuál es la probabilidad de que gane los cuatro partidos seguidos y se corone campeón?.

SOLUCIÓN:
Para calcular esta probabilidad, se multiplica el número2/3 en cada paso. Es decir:

a) La probabilidad de que gane el primer partido ya sabemos que es: 2/3
b) La probabilidad de que gane los dos primeros es: $(2/3) . (2/3) = (2/3)^2 = 4/9$
c) La probabilidad de que gane tres partidos seguidos es: $(2/3) . (2/3) . (2/3) = (2/3)^3 = 8/27$
Y finalmente:
d) La probabilidad de que gane los cuatro partidos consecutivos y se corone campeón es :
$(2/3) . (2/3) . (2/3) . (2/3) = (2/3)^4 = 16/81 = 0{,}1975 < 0{,}20$

Quiere decir que las posibilidades de que un equipo de estas características se corone campeón son menores al 20 por ciento. Eso es lo curioso, y merece una interpretación.
El hecho de que un equipo sea doblemente mejor que cualquier otro es obviamente preferible. Eso no se discute. Pero todo lo que se puede decir, cuando faltan cuatro partidos, es que tiene menos del 20 por ciento de posibilidades de conseguirlo.
Un paso más. En este ejemplo, se usa el número 2/3 para mostrar cómo disminuye la probabilidad a medida que uno avanza en el torneo, aunque un equipo sea muy bueno. Con todo, el número 2/3 se puede reemplazar por cualquier otro que uno crea que se ajuste mejor, y seguir con el mismo cálculo. De hecho, si la probabilidad de un equipo favorito fuera ¾ (un altísimo 75 por ciento) de ganar cualquier partido, entonces su probabilidad para salir campeón se calcula: $(3/4)^4 = 81/256 = 0{,}3164…$ O sea, apenas ligeramente mayor que el 30 por ciento.

HERENCIA CON INFINITAS MONEDAS

Un señor tenía dos hijos. Era una persona muy rica… tan rica, que su capital era infinito. Como sabía que estaba por morirse, convoca a sus hijos y antes de retirarse de este mundo les dice: "Yo los quiero a los dos por igual. No tengo otros herederos más que ustedes, de modo que les voy a dejar mi herencia en monedas de un peso". (Es decir que les dejaba infinitas monedas de un peso.) "Eso sí, quiero que hagan una repartición justa de la herencia. Aspiro a que ninguno de los dos trate de sacar ventaja sobre el otro". Y murió.

Llamemos a los hijos A y B. Los dos, después de pasar por un lógico período de duelo, deciden sentarse a pensar en cómo repartir la herencia respetando el pedido del padre. Luego de un rato, A dice tener una idea y se la propone a B.
–Hagamos una cosa –dice A–. Numeremos las monedas. Pongámosle 1, 2, 3, 4, 5… etcétera. Una vez hecho esto, te propongo el siguiente procedimiento: tu eliges primero dos monedas cualesquiera. Después, me toca a mí. Yo, entonces, elijo alguna de las monedas que has elegido, y te toca a ti otra vez. Eliges otra vez dos monedas de la herencia, y yo elijo una de las que seleccionaste, y así sucesivamente. Tu vas eligiendo dos por vez, y yo me quedo con una de las que ya apartaste. B se queda pensando: ¿es justa la propuesta de A?, ¿es equitativa?, ¿reparte la herencia en cantidades iguales?, ¿respeta la voluntad del padre?

SOLUCIÓN:
Este problema es interesante porque no tiene una solución única. Es decir: no se puede afirmar que la propuesta es justa ni injusta. Veamos:

CASO 1.

Supongamos que lo que propone A se lleva a cabo de la siguiente manera:

B elige las monedas 1 y 2.
A saca entonces la moneda 2.
B elige las monedas 3 y 4.
A se queda con la 4.
B elige las monedas 5 y 6.
A se queda con la 6.

Está claro el patrón que están siguiendo, B elige dos monedas consecutivas, una impar y otra par, y A se queda con la moneda par. ¿Es justo este proceso? Uno puede decir que sí, porque B se va a quedar con todas las monedas impares y A con todas las pares. Si ésa va a ser la forma de distribuir la herencia, la voluntad del padre se verá satisfecha y ninguno de los dos sacará ninguna ventaja.

CASO 2.

Supongamos que ahora el proceso se lleva a cabo de la siguiente manera:

B elige las monedas 1 y 2.
A elige la moneda 1.
B elige las monedas 3 y 4.
A elige la moneda 2 (que había elegido B en la primera vuelta).
B elige las monedas 5 y 6.
A elige la moneda 3.
B elige las monedas 7 y 8.
A elige la moneda 4…

¿Le parece que la distribución es justa? Si este proceso continúa, y obviamente debería continuar porque las monedas son infinitas, A se estaría quedando con todas las monedas, mientras que a B no le quedaría nada. Es decir que esta repartición no es justa ni respeta la voluntad paterna. Sin embargo, la propuesta original que A le había hecho a su hermano B no está bien ni mal. Depende de la forma en que sean elegidas las monedas… y eso desafía la intuición.

Si en lugar de tratarse de una herencia infinita, se tratara de una herencia normal, como la que podría dejar cualquier persona al morir, la pongan en monedas o no, ¿la distribución que propuso A está siempre bien?

Este ejemplo muestra una vez más que los conjuntos infinitos tienen propiedades que atentan contra la intuición. De hecho, la moraleja que uno saca de estos ejemplos es que las leyes con las que estamos acostumbrados a pensar con los conjuntos finitos no necesariamente son aplicables a los conjuntos infinitos, y por lo tanto hay que aprender a pensar distinto y a entrenar la intuición.

TIRAR 200 VECES UNA MONEDA

El doctor Theodore P. Hill, profesor en el Instituto de Tecnología de Georgia, le pidió a los estudiantes de matemática de su curso que hicieran el siguiente trabajo en sus casas: “Tomen una moneda y arrójenla al aire 200 veces. Anoten la sucesión de resultados que van obteniendo (en caras = ”0” y cruces = ”1”). Sin embargo, si no tienen ganas de arrojar la moneda al aire, me alcanza con que simulen haberlo hecho y anoten lo que les parece que podría darles las 200 tiradas.”

No parecía una tarea muy difícil. Al día siguiente, los alumnos entregaron las hojas con las distintas sucesiones de ceros y unos que cada uno de ellos había obtenido. Hill los fue nombrando a uno por uno mientras leía el papel que le habían entregado y casi sin error podía detectar quién había hecho el experimento tirando efectivamente la moneda al aire 200 veces y quién no. ¿Cómo podía saberlo?

SOLUCIÓN:
Lo que sucede es que hay ciertos patrones que es muy probable que aparezcan al arrojar verdaderamente una moneda —que no son los que uno esperaría— y, por lo tanto, los alumnos que inventaban el resultado no los incluían. De esa forma, se estaban —casi— autoincriminando.
¿A qué nos referimos?. Yo voy a escribir aquí abajo dos sucesiones de 100 tiradas: una la inventé yo, la otra se corresponde a un experimento real.

Primera:

10001 10010 10101 10110 00101 11001 10010 01110 10010 00110
01111 01001 00110 10001 11001 00110 10100 10001 10110 11100

Segunda:

10001 01100 01110 00110 00000 10111 10110 00100 00111 11001
10001 00000 01101 11101 11110 01101 11011 00010 01010 01111

Mírelos con detenimiento y decida cuál le parece que es la falsa.

La explicación que dio Hill fue: “La gente, en general, no tiene idea de lo que significa el azar. Por lo tanto, cuando tiene que inventar datos, lo hacen de acuerdo con su creencia o percepción. En consecuencia, como es tan fácil errar en lo que es azaroso, también me resulta fácil a mí descubrir quién se tomó el trabajo de hacer realmente el experimento, y quién, en su defecto, eligió imaginarlo”.
¿Por qué?, ¿cómo sabía Hill cuál era cada una?, ¿le alcanzó a usted con mirar las dos secuencias que figuran más arriba para sacar alguna conclusión?. Utilizaremos la probabilidad para intentar descubrirlo.
Una característica interesante (y muy utilizada en la vida) son las rachas. Es decir, muchos “ceros” seguidos o muchos “unos”. Pensando en estas rachas, voy a contar cada racha que aparece en las dos sucesiones de más arriba. Por ejemplo, como la primera empieza con

10001 10010 10101 10110…

entonces, la sucesión de rachas empieza así:

13221111112…

ya que primero hay un “uno” solo, después le siguen “tres ceros”, después “dos unos”, y así siguiendo. Luego, fíjese ahora en lo que resulta de escribir las dos secuencias de rachas:

132211111121231132221231121322411212211332122111213212132

13112333261141231452231621415221312312111124

Mirando ahora estas dos últimas tiras de números, ¿cuál le parece más factible de ser la verdadera y

cuál la falsa?. Por ejemplo, la tira de abajo, contiene dos números 6 y dos números 5. Eso se corresponde a que en algún momento del proceso o bien salieron 6 caras o 6 cruces seguidas, y en otra oportunidad, 5 caras o 5 cruces seguidas. En cambio, en la primera tirada, eso no sucedió.
Justamente, estamos ahora en condiciones de preguntarnos: ¿Usted diría que es alta o baja la probabilidad de que aparezcan o bien seis o más caras consecutivas o bien seis (o más) cruces consecutivas? Intuyo su respuesta: “la probabilidad es bastante baja”. La intuición que tenemos nos hace sospechar que seis o más caras o cruces consecutivas es poco probable que sucedan en 100 tiradas.
Lo notable es que la probabilidad de que esto suceda es mucho más alta de lo que uno supone. La teoría indica que la probabilidad de tener rachas de 5 en una tirada de 100 monedas es casi un 81%, rachas de 6 un 55% e incluso rachas de 7 son bastante probables: casi un 33,33%.
La Teoría de Probabilidades muestra también que si uno tira una moneda 354 veces, la probabilidad de que aparezcan 10 caras o 10 cruces seguidas es mayor que 1/2 (más que un 50% de posibilidades). Después de 512 tiradas, ese porcentaje aumenta a un 63%. Y, por último, si uno tirara una moneda 3.550 veces las posibilidades de que salgan 10 caras o 10 cruces seguidas es de un 99,9%. Más aún: con 3.550 tiradas hay un 50% de posibilidades de que estas rachas de 10 seguidas (caras o cruces) se reproduzcan al menos 5 veces.
Por eso, cuando uno va a un casino, y le dicen que en cierta mesa donde se está jugando a la ruleta salió cinco o seis o siete veces seguidas el color negro, uno tiene la tendencia de intuir que ahora le toca al rojo. De hecho, cada tirada es independiente y, por lo tanto, lo que pasó antes es irrelevante. Sin embargo, con el afán de creer que uno es capaz de predecir el tal azar, somos capaces de no utilizar los métodos a nuestro alcance (la Teoría de Probabilidades, por ejemplo) para tomar una decisión más educada. Y piense que en un casino las ruletas funcionan muchas horas seguidas.
Situaciones como las que ésta son las que usan aquellos que estudian a los que quieren falsear datos económicos o fraudes equivalentes. Quien tiene un ojo entrenado y sabe qué esperar es capaz de sospechar o detectar quiénes son los que entregan una declaración viciada y quienes no.
Falsear el azar es algo extremadamente difícil. El tema merece una elaboración mayor, pero como dato muy interesante vaya una anécdota: aquellos que usan un iPod para escuchar música saben que la pueden reproducir en forma no programada. Es decir, el propio aparato elige al azar el orden de aparición de las canciones. El hecho es que muchos usuarios se quejaron ante Apple porque había una repetición de canciones de los mismos álbumes. Fue tal la presión que Steve Jobs y su gente tuvieron que modificar su función “random” de manera tal de que se pareciera más a lo que los humanos entendemos por azar. En algún sentido no podemos tolerar las rachas, que son de alta probabilidad en cualquier proceso que involucre muchas repeticiones.

CUATRO BOLITAS DE COLORES

Se ponen cuatro bolitas dentro de una caja: una de color blanco, otra de color negro y dos bolitas de color rojo. Después de mezclar un tiempo, un señor mete la mano en la caja y extrae dos de las cuatro bolitas. Sin que nadie pueda ver dice: de las dos bolitas que saqué hay una roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra bolita sea roja también?. (Advertencia: el resultado correcto no es 1/3).

SOLUCIÓN:
Las bolitas que están dentro de la caja las voy a denominar así:

B = Blanca   N = Negra   R1 = Roja 1   R2 = Roja 2

Las posibilidades al extraer dos bolitas son las siguientes:

BN - BR1 – BR2 – NR1 - NR2 - R1R2

Esos son TODOS los posibles pares de bolitas que se pueden extraer. Dicho esto, como el señor anuncia que una de las bolitas es roja, entonces, eso excluye que en la mano tenga la combinación BN. Sin embargo, debe tener alguna de estas cinco posibilidades:

BR1 – BR2 – NR1 – NR2 – R1R2

Por lo tanto, para calcular la probabilidad de que la otra bolita, o sea, la que no mostró sea roja, lo que hay que hacer es dividir los casos favorables sobre casos posibles.

Casos favorables: solamente ¡uno! (R1R2)
Casos posibles: ¡cinco! (BR1 – BR2 – NR1 – NR2 – R1R2)

Luego, la probabilidad de que la otra bolita sea roja es 1/5.

MEDIAS BLANCAS Y NEGRAS

En un cajón se tienen cuatro medias. No me refiero a pares de medias, sino a cuatro medias en total. Las medias son o bien de color blanco (B) o de color negro (N). Lo que se sabe es que si uno mete la mano en el cajón y saca dos medias cualesquiera (sin mirar, claro está), la probabilidad de que las dos medias que uno extrajo sean las dos blancas es ½, o sea, un 50%. La pregunta es: ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par de medias negras?

SOLUCIÓN:
Aunque parezca mentira, la respuesta es… ¡cero!
Llamemos a las medias así:

B1 – B2 - X1 – X2

Las que llamamos B1 y B2 son las dos medias blancas que tiene que haber, si no, no habría posibilidades de tener un par blanco. Las otras dos no sabemos de qué color son. Veamos cuáles son las posibles combinaciones:

B1B2 – B1X1 – B1X2 – B2X1 – B2X2 – X1X2

Como se sabe que la probabilidad de sacar un par blanco es de 1/2, no pueden ser todas las medias blancas (si no, ¡la probabilidad sería 1! O un 100%). Luego, o bien X1 o bien X2, o bien ambas, tienen que ser negras. Pero para que la probabilidad de sacar dos medias blancas sea 1/2, eso significa que de las seis posibilidades que figuran más arriba, tres tienen que consistir en dos blancas, por lo tanto, las otras tres no pueden tener dos blancas.

Si X1 y X2 fueran las dos negras, entonces si uno mira una vez más las seis posibilidades, quedarían estas probabilidades:

- 2 blancas: 1/6 (B1B2). O sea, un caso favorable sobre seis posibles.
- 2 negras: 1/6 (X1X2). Lo mismo, uno en seis.
- Mixtas: 4/6 = 2/3 (B1X1 – B1X2 - B2X1 - B2X2). En este caso, hay cuatro favorables sobre seis posibles.

Luego, no pueden ser X1 y X2 negras.
Veamos qué pasa si una de las dos es blanca, digamos X1 y la otra, X2, es negra.
En ese caso, tenemos los siguientes pares blancos: B1B2, B1X1 y B2X1. Esto da justo 1/2 de probabilidad de que sea un par blanco.
Veamos los otros tres pares que quedan formados:
B1X2, B2X2 y X1X2. Los tres pares restantes ¡son mixtos! Luego, la probabilidad de que haya un par negro es ¡cero!
Moraleja: Como siempre, es muy poco probable que a uno en la vida le pidan que ponga la mano en un cajón en donde hay cuatro medias, no lo dejen mirar, y encima le digan que la probabilidad de sacar un par blanco es de 1/2. Casi seguro que no. Pero lo interesante de lo que hicimos más arriba es que uno tuvo que, inexorablemente, pensar distinto para poder contestar. Y eso, pensar distinto, es lo que a uno lo prepara para enfrentar situaciones inesperadas que requieren de soluciones no convencionales. Y como tantas otras veces, es la matemática la que provee las herramientas.

GENERALIZACIÓN DEL PROBLEMA DE LAS MEDIAS BLANCAS Y NEGRAS

En el problema original, que aparece más arriba, se tienen cuatro medias en total (entre blancas y negras). Demos una pequeña vuelta de tuerca, y supongamos que uno tiene en total 16 medias y el dato que se conoce es el mismo que en el problema original: la probabilidad de que al meter la mano en el cajón y sacar un par correcto (o bien blanco o bien negro) sea 1/2 (es decir, el 50% de las veces). La pregunta es: ¿cuántas medias blancas y negras tiene que haber entre las 16?

Más aún, uno puede suponer que en lugar de 16 medias se tiene un número k de medias y evaluar qué sucede en ese caso.

SOLUCIÓN:En el caso de tener 16 medias.
Supongamos que entre las 16 uno tiene m medias blancas y n negras. O sea: m + n = 16
Voy a llamar $\binom{p}{q}$ al combinatorio que cuenta cuántas formas hay de elegir q objetos entre p.
Entonces, ¿cuántas formas hay de contar pares de medias de manera que sean ambas blancas o ambas negras?

$\binom{m}{2}$ cuenta los pares blancos $\qquad$ $\binom{n}{2}$ cuenta los pares negros

$\binom{m}{1}\times\binom{n}{1}=m\times n$ cuenta los pares mixtos

¿Cuántas medias blancas y cuántas medias negras tiene que haber para que la probabilidad de sacar un par correcto o un par mixto sea la misma?

Para eso, hace falta que: $\binom{m}{2}+\binom{n}{2}=m\times n$ O sea, $\frac{1}{2}(m\times(m-1)+n\times(n-1))=m\times n \qquad (a)$

Entonces: $n^2-n+m^2-m=2\cdot m\cdot n \qquad ; \qquad (n-m)^2=n+m \qquad (b)$

Pero uno sabe que: $m+n=16 \Rightarrow n=16-m$

Luego de la igualdad (b) se sigue: $(16-m-m)^2=16 \Rightarrow (16-2\mathrm{m})^2=16$

Calculando las raíces del polinomio cuadrático en m se obtienen dos valores, que son los que pueden tomar m y n para que tenga solución el problema, y esos valores son:

(m = 10 y n = 6) o bien (n = 10 y m = 6).

Luego, encontramos lo que estábamos buscando: para que la probabilidad de sacar dos medias que formen un par correcto sea de 1/2 (o el 50% de las veces) hace falta que haya o bien 10 medias blancas y 6 negras, o al revés, 6 medias negras y 10 blancas.

SOLUCIÓN: En el caso de tener un número k de medias.
Ahora suponemos que se tienen k medias, de las cuales m son blancas y n son negras y se sabe que la probabilidad de sacar un par correcto es de 1/2, la pregunta sigue siendo: ¿quiénes tienen que ser n y m?
En este caso, cuando (n + m) = k, la ecuación de (b) resulta:

$$(k-2\cdot m)^2=k \qquad \Rightarrow \qquad 4\cdot m^2-(4\cdot k)\cdot m+(k^2-k)=0 \qquad (c)$$

Luego, igual que antes, uno se tropieza con un polinomio cuadrático, y quiere calcular sus raíces. En este caso son:

$$m=\frac{k+\sqrt{k}}{2} \qquad ,o \quad bien \qquad m=\frac{k-\sqrt{k}}{2}$$

De aquí se ve que si m es una de las raíces, entonces n es la otra, y viceversa.
Esto explica que k TIENE que ser un cuadrado para que el problema tenga solución. Es que como usted advierte en (c) aparece involucrada la raíz cuadrada del número k y, por lo tanto, para que sea un número entero, ese número k tiene que ser un cuadrado (o lo que es lo mismo, k tiene que ser el cuadrado de algún número natural).
Analizando hacia atrás el caso original, en donde k = 4, como uno sabía que la probabilidad de que al meter la mano en el cajón saliera un par blanco es 1/2, entonces, solamente puede haber UNA media negra y, por lo tanto, la probabilidad de que salga un par negro (como decía el problema original) es ¡CERO!

m = 3 y n = 1

¿QUIÉN PAGA LA COMIDA?

Supongamos que usted y yo somos compañeros de trabajo. Todos los mediodías vamos al restaurante para almorzar y tiramos una moneda. El perdedor es quien paga la comida.

Después de haber ganado tres veces consecutivas, le propongo lo siguiente: en lugar de tirar una sola vez la moneda al aire y decidir quién paga, yo voy a tirar la moneda una vez y usted la tira dos veces y anotamos los resultados.

Si luego de las tres tiradas usted saca más caras que yo, entonces gana usted. Si no, gano yo.

En principio, con el juego original, la probabilidad de que cada uno pague es la misma: 1/2. Con la forma que le propongo, ¿quién está mejor: usted o yo?

SOLUCIÓN:

Anotemos los resultados posibles en una tabla y comparemos quién tiene más casos a favor.

Usted (1er. tiro)	Usted (2do. tiro)	Yo (único tiro)
C	C	C
C	C	X
C	X	C
C	X	X
X	C	C
X	C	X
X	X	C
X	X	X

Ahora, observe las filas sombreadas. En esos casos únicamente, usted tiene más caras que yo. Por lo tanto, usted tiene cuatro posibilidades a favor y yo, otras cuatro.

La moraleja es que si yo pensaba que alguno de los dos tenía más posibilidades luego haber incrementado el número de tiradas estaba equivocado. Aun variando el número de tiros, la probabilidad de acertar sigue siendo la misma.

UN PROBLEMA PRECIOSO SOBRE PROBABILIDADES

El problema que sigue es, sencillamente, espectacular. Vale la pena pensarlo un rato.

Suponga que yo le doy todos los dígitos que hay (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) y le digo que los distribuya en los espacios que quedan en esta fila de números:

5 _ 383 _ 8 _ 2 _ 936 _5 _ 8 _ 203 _ 9 _ 3 _ 76

Por ejemplo, si los pusiera ordenadamente, se tendría el siguiente número

5 0 383 1 8 2 2 3 936 45 5 8 6 203 7 9 8 3 9 76

O sea, formamos un nuevo número:

5038318223936455862037983976

Por supuesto, si cambio la distribución de los diez dígitos (digamos que los pongo ahora en orden descendente) cambia el número que se obtiene: 5938388726936554832032913076
Es decir, cada posible distribución de los dígitos genera un nuevo número. Al cambiar el número, van a cambiar sus divisores. La pregunta es: si usted los distribuyera al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea divisible por 396?. Es decir, se trata de pensar cuántas posibilidades hay (sobre el total de números que se pueden obtener) que resultan tener a 396 como factor o como divisor.

SOLUCIÓN:
Le propongo que pensemos juntos cuáles son los divisores de 396. Es que si se trata de ver cuántos números (de los que se pueden obtener con cada distribución) son divisibles por 396, lo primero que hay que hacer es descomponer al número 396 y fijarse cuáles son sus factores:

$$396 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11$$

Luego, para que uno de los números que se obtiene al hacer la distribución al azar de los dígitos sea divisible por 396, tiene que ser divisible por 4, por 9 y por 11 (por lo menos). Por ejemplo, no alcanzaría que fuera divisible por 2 solamente, porque necesita ser divisible por 4 para que pueda ser divisible por 396. Pero nada le impide ser divisible por 8 o por 16. Es decir, puede ser divisible por cualquier potencia de dos, pero al menos tiene que ser divisible por 4. Tampoco alcanzaría con que fuese divisible por 3 nada más. Tiene que ser divisible por 9. Y por último, tiene que ser divisible por 11.
Recordamos aquí las reglas de divisibilidad:

- Para que sea divisible por 4, los dos últimos dígitos del número tienen que ser divisibles por 4. En realidad, es una condición necesaria y suficiente. Un número es divisible por 4 si y sólo si sus últimos dos dígitos son divisibles por 4.
- Para ser divisible por 9, es necesario (y suficiente) con que la suma de todos los dígitos sea divisible por 9.
- Y por último, para que sea divisible por 11, lo que tiene que pasar es que la suma alternada (es decir, uno va sumando uno y restando otro) de los dígitos que componen el número sea múltiplo de 11.
  Por ejemplo, el número 121 es múltiplo de 11, porque si uno suma alternadamente sus dígitos: $1 - 2 + 1 = 0$ (que es múltiplo de 11)
  Otro ejemplo: el número 407 es múltiplo de 11, porque la suma alternada de sus dígitos es:
  $4 - 0 + 7 = 11$ (que es múltiplo de 11)
  En cambio, el número 1234567 no es múltiplo de 11, porque la suma alternada de sus dígitos: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 = 4$ que no es múltiplo de 11.
  Último ejemplo: el número 165.649 también es múltiplo de 11 ya que la suma alternada de sus dígitos es: $1 - 6 + 5 - 6 + 4 - 9 = -11$, que es múltiplo de 11
  Más aún: cuando un número tiene muchos dígitos, si uno quiere saber si es múltiplo de 11 o no, puede hacer lo anterior, o bien, sumar todos los dígitos que están en las posiciones pares, y restar los que están en las posiciones impares.

Por ejemplo, como vimos antes, para saber si el número 165.649 es múltiplo de 11 uno suma los dígitos que están en posiciones impares: 1, 5 y 4. O sea, 1 + 5 + 4 = 10
Por otro lado, suma los que están en las posiciones pares: 6, 6 y 9. O sea, 6 + 6 + 9 = 21
Luego, cuando uno resta 10 – 21 = –11 (que es múltiplo de 11).
Esta forma de estimar si un número es o no múltiplo de 11, es otra manera de hacer la suma alternada. No contiene nada nuevo. Técnicamente parece más sencilla. Sólo eso.

Ahora, con todos estos datos que hemos juntado, estamos en condiciones de seguir avanzando. Analicemos los casos:

a) No importa cuál sea la distribución que usted haga, como todos los números van a terminar en 76, y 76 es un número divisible por 4, entonces, todos los números van a ser divisibles por 4.
b) Para averiguar si cualquiera de estos números es múltiplo de 9, basta con sumar todos los dígitos. Lo interesante es que cuando usted haga la distribución al azar de los dígitos que yo le di (del 0 al 9), no importa cómo estén esparcidos por el número final, la suma siempre va a dar lo mismo. En este caso, los números que figuraban antes (los que están en las posiciones impares) suman:

$$5 + 3 + 8 + 3 + 8 + 2 + 9 + 3 + 6 + 5 + 8 + 2 + 0 +3 + 9 + 3 + 7+ 6 = 90$$

Por otro lado, la suma de los 10 dígitos:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

Si ahora sumamos: $90 + 45 = 135$

Y este número, ¡es múltiplo de 9!. Luego, hemos deducido que no importa cuál sea la distribución
de los dígitos que uno haga, el resultado es siempre un múltiplo de 9.
c) Ahora, falta el último paso: determinar cuáles de los números que se generen son múltiplos de 11.
Para esto, le pido que me siga con el siguiente razonamiento: al distribuir los 10 dígitos, estos van a ocupar posiciones pares. Le sugiero que recorra la lista original (con los espacios en blanco) y fíjese que todos esos lugares están en posiciones pares. Pero, al margen de los 10 dígitos, aparecen ahora otros dígitos: el 8 (que está en la cuarta posición), el 3 (que está en la décima segunda), el 0 (que está en la vigésima) y por último el 6 (que está en la vigésima octava).

5 _ 383 _ 8 _ 2 _ 936 _5 _ 8 _ 203 _ 9_ 3 _ 76

Por lo tanto, ahora, para averiguar si el número que uno va a generar es o no múltiplo de 11, basta fijarse que si uno suma todos los dígitos que están en las posiciones pares, obtiene:
Por un lado 45, que es la suma de todos los dígitos que faltan incorporar y, por otro lado, hay que sumar 8 + 3 + 0 + 6 = 17.

Luego, el total de las posiciones pares resulta ser (17 + 45 = 62).
La suma de las posiciones impares es:

$$5 + 3 + 3 + 8 + 2 + 9 + 6 + 5 + 8 + 2 + 3 + 9 + 3 + 7 = 73$$

Ahora, para decidir si el número será o no múltiplo de 11 uno tiene que restar la suma de las posiciones impares (73) menos la suma de las posiciones pares (62):
73 – 62 = 11 (que es múltiplo de 11, obviamente).

Hemos descubierto que sea cual fuere la distribución que haga usted de los diez dígitos que yo le había dado al principio, cualquiera de los números que resulte es:

a) Múltiplo de 4
b) Múltiplo de 9
c) Múltiplo de 11

Luego, cualquiera de esos números, resultará ser múltiplo de 396.
Y, como moraleja final, lo que se deduce es que la probabilidad de que el número que uno obtenga sea múltiplo de 396 es ¡1!. O sea, ¡pasa siempre!
Este problema es una manera muy bonita de exhibir, una vez más, cómo algo que en principio parece no tener respuesta, o bien resultaría tan laborioso analizar caso por caso, que parece no tener solución y, sin embargo, con el análisis que hemos hecho, permite deducir que todos son múltiplos de 396.
Para terminar, una pregunta breve: ¿cuántos números posibles se podrían generar al distribuir los diez dígitos?
Como hay 10 dígitos para distribuir, hay 10!

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3.628.800$$

Esto quiere decir que, si hubiéramos tenido que analizar caso por caso, habríamos tenido que evaluar más de 3.600.000 números para saber si eran (o no) múltiplos de 396.

¿ES JUSTA ESTA DECISIÓN?

Supongamos que usted y yo tenemos algo para dirimir. Por ejemplo, hay un par de entradas para ver una muy buena obra de teatro y queremos decidir quién de los dos puede ir con su pareja. No tenemos una moneda, pero hay una urna que contiene tres bolitas: dos son de color blanco (B) y una de color rojo (R). Yo le sugiero que usted meta la mano en la urna (sin mirar) y saque dos bolitas. Si son del mismo color, gana usted. Si son distintas, gano yo. ¿Le parece que es justa la división?, es decir, ¿le parece que los dos tenemos 50% de posibilidades de quedarnos con las entradas?

Si su respuesta fuera que sí, explíqueme las razones. En el caso de que supusiera que no y yo le dijera que usted puede agregar una bolita de alguno de los dos colores para incluirla en la urna, ¿de qué color la elegiría para que los porcentajes (ahora) fueran iguales?

SOLUCIÓN:
A las dos bolitas blancas las voy a llamar B1 y B2. La roja será R. Al extraer dos de la urna, ¿cuáles

y cuántas son las posibilidades?:

B1R - B2R – B1B2

Es decir, uno advierte inmediatamente que hay tres posibles maneras distintas de obtener un par de bolitas, pero de estas tres formas hay dos que tienen bolitas de diferente color y sólo una que tiene las dos bolitas iguales. O sea, la probabilidad de tener dos bolitas de diferente color es 2/3 (dos posibilidades entre tres) y la probabilidad de tener dos bolitas del mismo color es 1/3 (una entre tres). Por lo tanto, a usted no le conviene aceptar mi invitación pues yo tengo el doble de posibilidades que usted de quedarme con las entradas.
Ahora, pasemos a la siguiente pregunta. Supongamos que usted tiene la oportunidad de agregar una bolita a la urna de manera tal de igualar las posibilidades suyas y mías, ¿qué color de bolita elegiría?
Le recuerdo que tenemos dos blancas (B1 y B2) y una roja (R). Usted ganaba si salían dos iguales y yo, si salían dos distintas. Fíjese lo que pasaría si agregáramos una bolita roja más.
Las bolitas rojas son ahora R1 y R2 (y las blancas siguen siendo B1 y B2).
Las posibilidades ahora al sacar dos bolitas son:

B1B2 – B1R1 – B1R2 – R1B2 - B2R2 – R1R2

O sea, las posibilidades en total son seis, y de las seis, solamente dos corresponden a bolitas del mismo color y cuatro a bolitas de distinto color. Luego, las probabilidades son:

a) Probabilidad de que salgan dos bolitas del mismo color: 2/6 = 1/3.
b) Probabilidad de que salgan dos bolitas de distinto color: 4/6 = 2/3.

La moraleja entonces es que aun agregando una bolita roja, igual yo sigo teniendo más posibilidades de quedarme con las entradas. Igual que antes, yo sigo duplicando las posibilidades suyas.
Queda entonces pendiente la siguiente pregunta: ¿qué pasará si agrego otra bolita blanca más en lugar de una bolilla roja? Eso significaría tener tres bolitas blancas: B1, B2 y B3. Y siempre está la bolilla roja (R). Fíjese lo que pasa ahora. ¿Cuáles y cuántas son las posibles maneras de extraer dos bolillas?:

B1R – B2R – B3R – B1B2 - B1B3 – B2B3

O sea, siguen habiendo seis posibles resultados. Sin embargo —y esto es lo que se transforma en muy diferente y muy importante— ahora en tres de los casos hay bolitas del mismo color, y en los otros tres, son bolitas de diferente color.
La moraleja entonces es que ahora SÍ hay las mismas posibilidades para los dos: hay un 50% de posibilidades de sacar dos bolitas de igual color y 50% de posibilidades de sacar bolitas de diferente color. Lo curioso (y ciertamente antiintuitivo) es que al agregar una bolita del color que falta (rojo), uno esperaría haber corregido el problema. O sea que, al haber dos bolitas de cada color, la probabilidad de sacar dos bolitas del mismo color o de colores diferentes fuera la misma. Sin embargo, no es así. Para garantizar eso, lo que uno podría hacer es agregar una cuarta bolita, pero del mismo color del que había dos (blanca) y entonces sí, todo queda como uno pretendía.